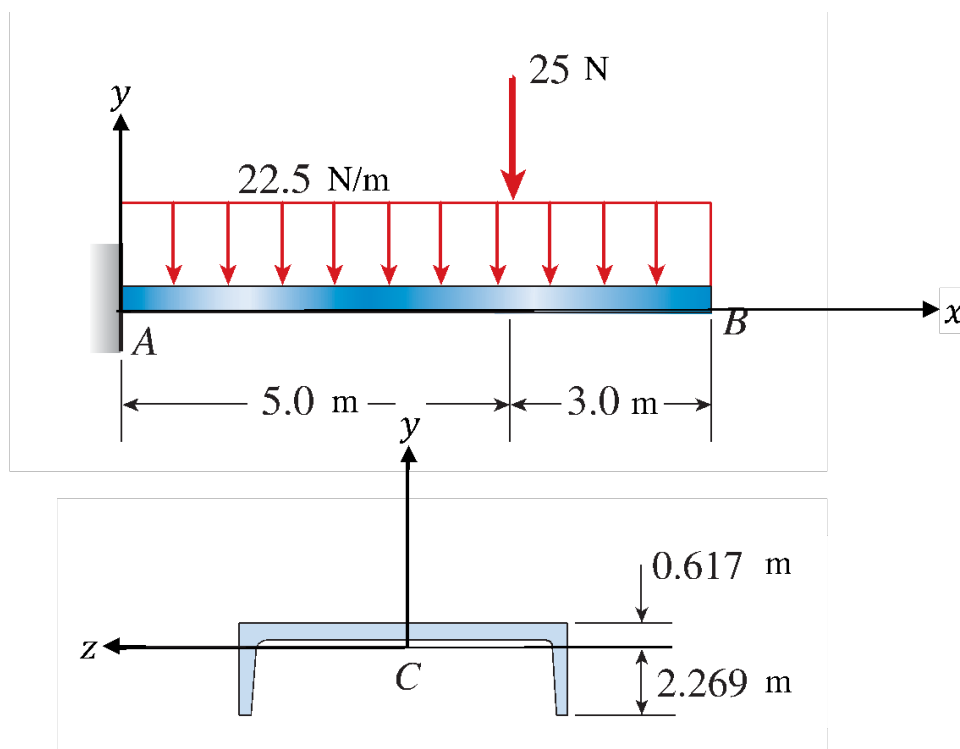


## Série 8a – solution

### Problème 8a.1 – Charge concentrée et distribuée

On considère une poutre  $AB$ , encastree en  $A$ , avec une force ponctuelle et une force distribuée. Le moment d'inertie à l'axe neutre est  $I_{z,y_0} = 3.35 \text{ m}^4$ . Trouver:

- (a) Les forces de réactions au point  $A$  et  $B$ .
- (b) La force de cisaillement  $V(x)$
- (c) Le moment de flexion  $M(x)$
- (d) La flèche  $w(x)$  de la poutre.



**Figure 8a.1.1** Le cantilever et sa section transverse. L'origine  $C$  est située sur l'axe neutre.

## Solution

### Qu'est ce qui est donné?

Charge distribuée:  $q = 22.5 \text{ N/m}$

Charge concentrée:  $F = 25 \text{ N}$

Longueur:  $L = 8 \text{ m}$

### Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope..

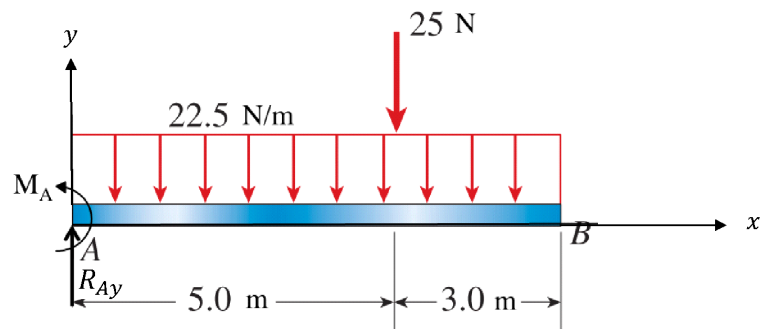
La coupe transversale de la poutre dans le plan ZY reste non déformée dans toute sa longueur..

### Qu'est-ce qui est demandé?

- Les forces de réaction au point A.
- Le diagramme des forces de cisaillement.
- Le diagramme des moments en flexion.
- L'équation de la déflexion de la poutre.

#### (a) Forces de réaction au point A

On calcule les forces de réaction à partir du diagramme des forces de la poutre entière:



**Figure 8a.1.2** | Diagramme des forces de la poutre.

En sommant les forces en  $y$ , on a:

$$\sum F_y = R_A - F - \int_0^L q \, dx = 0 \rightarrow R_A = 25 + (22.5)(8) = 205 \text{ N}$$

En utilisant l'équilibre des moments  $M_z$ , on déduit le moment  $M_A$ :

$$\sum M_z = 0 \rightarrow +M_A - \left( \int_0^L \frac{L}{2} q \, dx \right) - F \cdot 5 = 0 \rightarrow M_A = 845 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ce qui nous donne finalement:

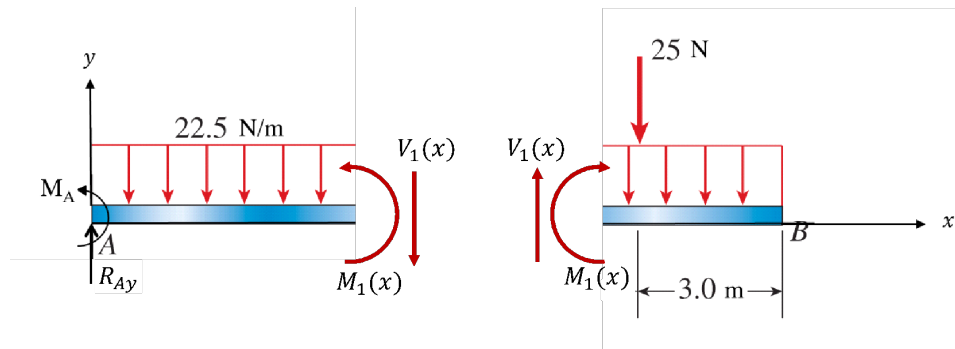
$$M_A = 845 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad R_A = 205 \text{ N}$$

#### (b) Diagramme des forces de cisaillement $V(x)$

Sur cette poutre, deux forces externes sont appliquées: la première est distribuée uniformément sur toute la longueur de la poutre, et la seconde est une charge ponctuelle à  $x = 5 \text{ m}$ .

On peut trouver  $V(x)$  par deux méthodes: i) méthode des sections et ii) méthode différentielle.

**Méthode des sections:** Nous allons considérer puis analyser deux parties distinctes de la poutre:  
De A à C ( $x < 5 \text{ m}$ ):

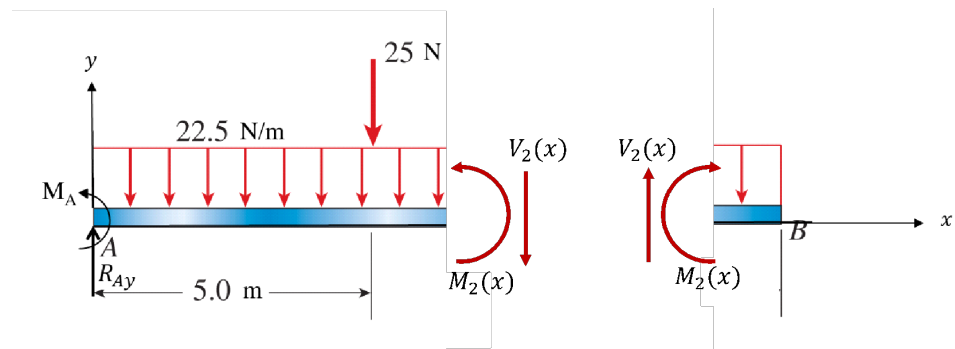


**Figure 8a.1.3** | Diagramme des forces et forces internes pour  $x < 5 \text{ m}$

On peut écrire la formule de l'équilibre des forces pour la partie de gauche comme illustré sur la Figure 8b.1.3:

$$V_1(x) = R_A - qx = (205 - 22.5x) \text{ N}$$

De C à D ( $x \geq 5 \text{ m}$ ):



**Figure 8a.1.4** | Diagramme des forces et forces internes pour  $x \geq 5 \text{ m}$

Comme nous l'avons fait précédemment, nous écrivons la formule de l'équilibre des forces pour la partie de gauche comme illustré sur la Figure 8b.1.4:

$$V_2(x) = R_A - qx - F = (180 - 22.5x) \text{ N}$$

**Méthode différentielle:** On considère tout d'abord la charge distribuée appliquée sur la poutre:

$$q(x) = 22,5 \quad x \in [0; 8]$$

Pour la force de cisaillement, on utilise la relation  $V(x) = - \int q(x) dx$

$$V_1(x) = -22,5 x + C_1 \quad x \in [0; 5]$$

$$V_2(x) = -22,5 x + C_2 \quad x \in [5; 8]$$

Avec les conditions aux bords:  $V_1(x = 0) = 205 \text{ N}$

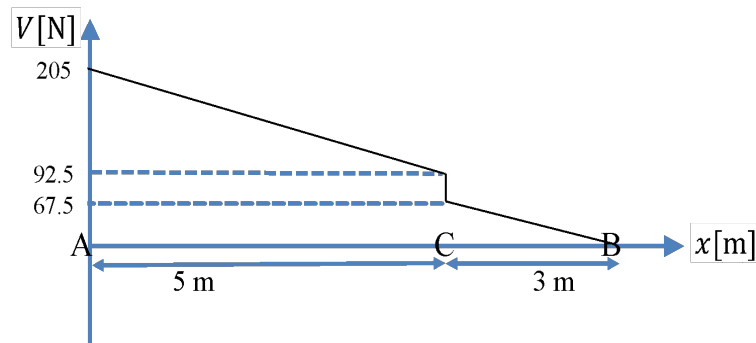
$$V_2(x = L) = 0 \Leftrightarrow -22,5 * 8 + C_2 = 0$$

On obtient:

$$V_1(x) = -22,5x + 205 \quad x \in [0; 5]$$

$$V_2(x) = -22,5x + 180 \quad x \in [5; 8]$$

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme des forces de cisaillement:



**Figure 8a.1.5** | Diagramme des forces de cisaillement

(c) Diagramme des moments en flexion.

Encore une fois, il est possible de trouver ce diagramme par les deux méthodes.

Méthode des sections:

De A à C ( $x < 5\text{ m}$ ) en regardant la partie de gauche:

$$M_1(x) - M_1(x=0) = M_1(x) + M_A = \int_0^x V(x') dx'$$

$$M_1(x) = -M_A + \int_0^x V_1(x') dx' = -M_A + \int_0^x (R_A - qx') dx'$$

$$= (-845 + 205x - 11,25x^2) \text{ N} \cdot \text{m}$$

De C à B ( $x \geq 5\text{ m}$ ) en regardant la partie de droite:

$$M_2(x=L) - M_2(x) = \int_x^L V_2(x') dx' \Leftrightarrow M_2(x) = 0 - \int_x^L (180 - 22,5x') dx'$$

$$M_2(x) = -720 + 180x - 11,25x^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Méthode différentielle:

On sait que  $M(x) = \int V(x)$

$$M_1(x) = -11,25x^2 + 205x + C_3 \quad x \in [0; 5]$$

$$M_2(x) = -11,25x^2 + 180x + C_4 \quad x \in [5; 8]$$

Avec les conditions aux bords:  $M_1(x=0) = -M_A$

$$M_2(x=L) = 0 \Leftrightarrow -11,25L^2 + 180L + C_4 = 0$$

Il aurait aussi été possible d'utiliser la continuité du moment:

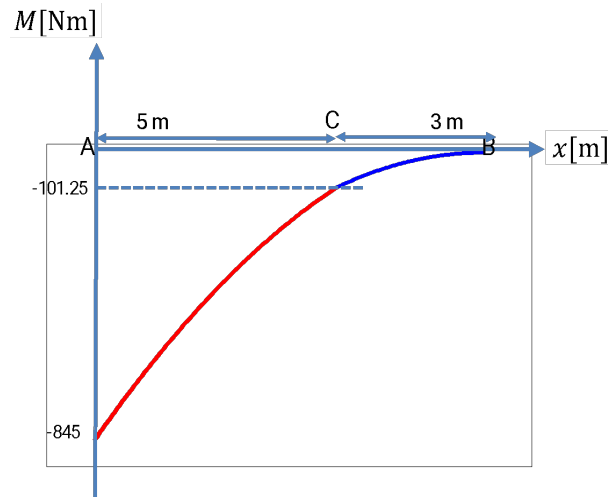
$$M_1(x=5) = M_2(x=5) \Leftrightarrow -11,25 \cdot 5^2 + 205 \cdot 5 - M_A = -11,25 \cdot 5^2 + 180 \cdot 5 + C_4$$

On obtient ainsi:

$$M_1(x) = -11,25x^2 + 205x - M_A \quad x \in [0; 5]$$

$$M_2(x) = -11,25x^2 + 180x - 720 \quad x \in [5; 8]$$

En utilisant les formules ci-dessus, on peut tracer le diagramme des moments en flexion:



**Figure 8a.1.6** | Diagramme des moments en flexion

(d) Déflexion de la poutre. Deux méthodes : i) intégrer  $M(x)$ . ii) superposition et formules

- La courbure de la poutre due aux moments en flexion en tous points de la poutre est donné par:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

On peut donc calculer l'équation de la déflexion de la poutre par double intégration de l'Eq. (0.0.10):

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \int_0^{x'} M(x'') dx'' \right) dx'$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut faire attention à calculer d'abord la dérivée de la déflexion, qui doit être continue en  $x = 5 \text{ m}$ . Il ne faut pas non plus oublier que le moment est en deux parties.

On obtient ainsi:

Pour  $x \leq 5$ :

$$\begin{aligned} w'(x) - w'(0) &= \frac{1}{EI} \int_0^x M_1(x') dx' = \frac{1}{EI} \int_0^x (-845 + 205x' - 11.25x'^2) dx' \\ &= \frac{1}{EI} \left( -845x + 205 \frac{x^2}{2} - 11.25 \frac{x^3}{3} \right) \end{aligned}$$

Poutre encastree à  $x=0 \rightarrow w'(0) = 0$

Pour  $x > 5$ :

$$\begin{aligned} w'(x) - w'(x=5) &= \frac{1}{EI} \int_5^x M_2(x') dx' = \frac{1}{EI} \int_5^x (-720 + 180x' - 11.25x'^2) dx' \\ w'(x) &= w'(x=5) + \frac{1}{EI} (1818.75 - 720x + 90x^2 - 3.75x^3) \end{aligned}$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI}(-312.5 - 720x + 90x^2 - 3.75x^3)$$

On peut maintenant intégrer une nouvelle fois pour obtenir la déflexion.

Pour  $x \leq 5$ :

$$w(x) - w(x=0) = \int_0^x w'(x') dx' = \frac{1}{EI} \left( -845 \frac{x^2}{2} + 205 \frac{x^3}{6} - 11.25 \frac{x^4}{12} \right)$$

$$w(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{-5070x^2 + 410x^3 - 11.25x^4}{12EI}$$

Pour  $x > 5$ :

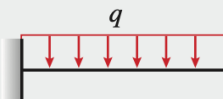
$$w(x) - w(x=5) = \int_5^x w'(x') dx'$$

$$w(x) - w(x=5) = \frac{1}{EI} (7398.4375 - 312.5x - 360x^2 + 30x^3 - 0.9375x^4)$$

$$w(x) = \frac{6250 - 3750x - 4320x^2 + 360x^3 - 11.25x^4}{12EI}$$

- **Méthode alternative** : Il est aussi possible d'utiliser la Table G de Gere & Goodno - beam deflection pour trouver la déflexion à l'aide de la méthode de superposition:

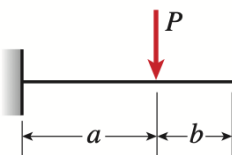
1



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

5



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

$$\text{At } x = a: \quad v = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \quad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$

On trouve alors directement:

Pour  $x \leq 5$ :

$$w(x) = \frac{-qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) - \frac{Px^2}{6EI}(3a - x)$$

Pour  $x > 5$ :

$$w(x) = \frac{-qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) - \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a)$$

---

En sachant que  $q=22,5$  ;  $L = 8$  m et  $a = 5$  m, on trouve:

Pour  $x \leq 5$ :

$$w(x) = \frac{-5070x^2 + 410x^3 - 11.25x^4}{12EI}$$

Pour  $x > 5$ :

$$w(x) = \frac{6250 - 3750x - 4320x^2 + 360x^3 - 11.25x^4}{12EI}$$

On retrouve bien les mêmes valeurs qu'avec l'intégration des moments en flexion.

## Problème 8a.2 – Calcul de la déflexion à partir des moments (1)

On considère la poutre  $AB$  de longueur  $L = 12$  m. Les diagrammes de force de cisaillement et de moment en flexion sont montrés sur la figure 9.2.1.

Module de Young  $E$ . Moment quadratique :  $I_z$

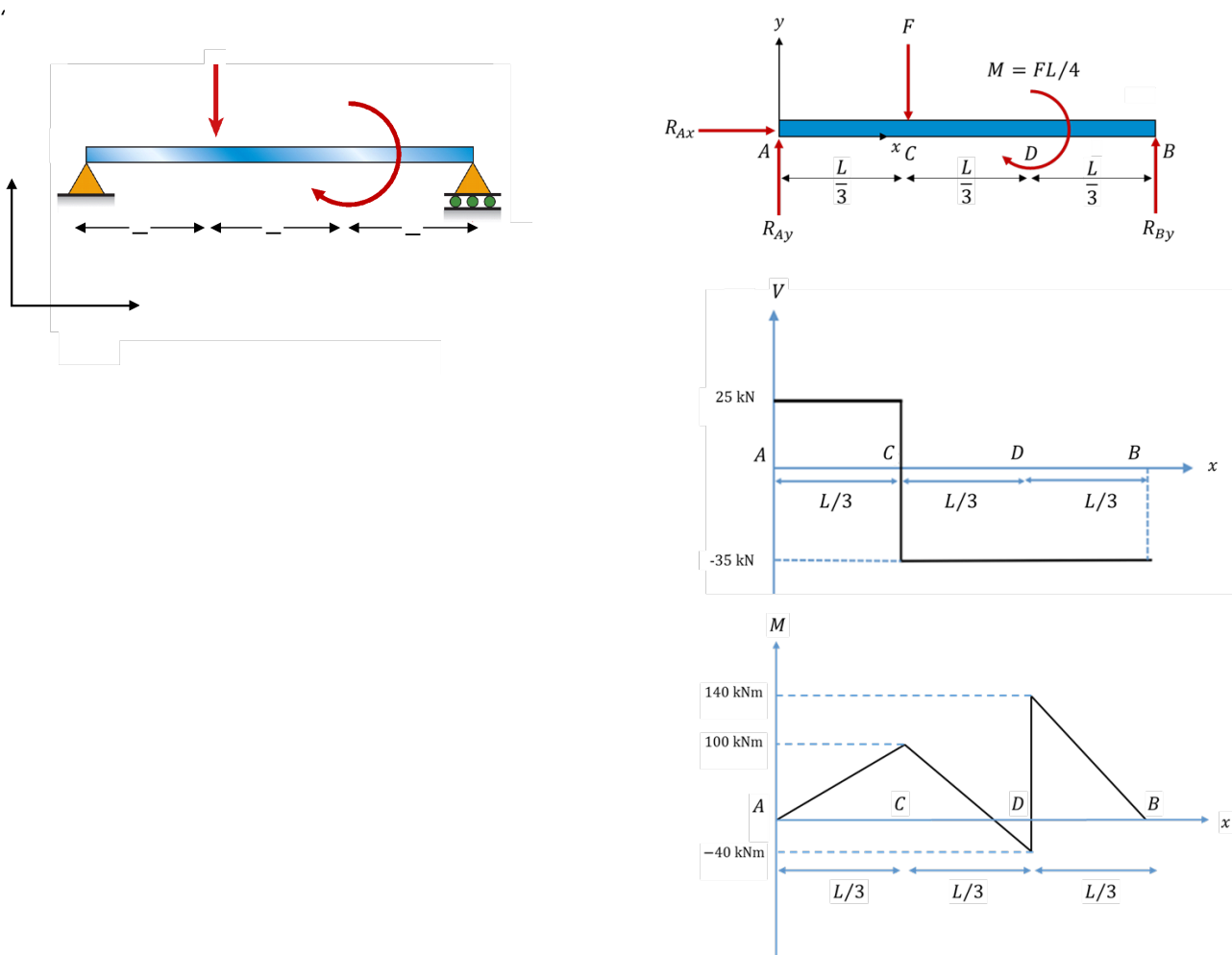
On vous donne le moment de flexion:

$$M_1(x) = 25x \text{ kNm. } 0 < x < L/3 \quad (0.0.1)$$

$$M_2(x) = -35x + 240 \text{ kNm. } L/3 < x < 2L/3 \quad (0.0.2)$$

$$M_3(x) = -35x + 420 \text{ kNm. } 2L/3 < x < L \quad (0.0.3)$$

Calculer la déflexion  $w(x)$  le long de la poutre.



**Figure 8a.2.1** | Diagrammes des forces, de cisaillement et de moment en flexion de la poutre  $AB$ .

Comme toujours, 2 options pour arriver à la flèche

- Si on donne le diagramme des forces, trouver  $M(x)$  par méthode sections (ou par méthode différentielle) (ici ça a été fait pour vous), et **enfin  $w(x)$  par double intégration de  $M(x)$**
- Superpositions et formulaire. Point de départ : les forces et moment externes, puis appliquer superposition se servant des formulaires des flèches.



## Solution 8a.2- Première Option

### 1. Conditions au bord

- a.  $w_1(x=0) = 0$
- b.  $w_3(x=L) = 0$

### 2. Continuité:

- a.  $w_1(x=L/3) = w_2(x=L/3)$
- b.  $w_2(x=2L/3) = w_3(x=2L/3)$
- c.  $w'_1\left(x=\frac{L}{3}\right) = w'_2(x=L/3)$
- d.  $w'_2\left(x=\frac{2L}{3}\right) = w'_3(x=2L/3)$

La courbure de la poutre due aux moments en flexion en tous points de la poutre est donné par:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

On peut donc calculer l'équation de la déflexion de la poutre par double intégration de (0.0.4):

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \int_0^{x'} M(x'') dx'' \right) dx'$$

On calcule d'abord  $w'(x)$ , la dérivée de la déflexion, qui doit être **continue** en  $x = \frac{L}{3} = 4 \text{ m}$  (point C), ainsi qu'en  $x = \frac{2L}{3} = 8 \text{ m}$  (point D). On obtient:

Pour  $x \leq \frac{L}{3}$ :

$$w'(x) - w'(0) = \frac{1}{EI} \int_0^x (25 x') dx'$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left( 25 \frac{x^2}{2} \right) + w'(0)$$

Pour  $\frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}$ :

$$w'(x) - w'\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \int_{L/3}^x (-35 x' + 240) dx'$$

$$w'(x) = w'\left(x = \frac{L}{3}\right) + \frac{1}{EI} \left( -\frac{35 x^2}{2} + 240x - 680 \right)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35 x^2}{2} + 240x - 480 \right) + w'(0)$$

Pour  $\frac{2L}{3} < x < L$ :

$$w'(x) - w'\left(x = \frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \int_{2L/3}^x (-35 x' + 420) dx'$$

$$w'(x) = w'\left(x = \frac{2L}{3}\right) + \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^2}{2} + 420x - 2240 \right)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^2}{2} + 420x - 1920 \right) + w'(0)$$

Notez que l'on ne connaît pas encore  $w'(x = 0)$ . Nous le calculerons par la suite.

Nous pouvons maintenant intégrer une seconde fois pour calculer la déflexion:

Pour  $x \leq \frac{L}{3}$ :

$$w(x) - w(x = 0) = \int_0^x w'(x') dx' = \int_0^x \left( \frac{1}{EI} \left( 25 \frac{x'^2}{2} \right) + w'(0) \right) dx'$$

$$w(x = 0) = 0 \text{ and. } w(x) = \frac{25x^3}{6EI} + w'(0)x$$

Pour  $\frac{L}{3} < x < 2\frac{L}{3}$ :

$$w(x) - w\left(x = \frac{L}{3}\right) = \int_{L/3}^x w'(x') dx' = \int_{L/3}^x \left( \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x'^2}{2} + 240x' - 480 \right) + w'(0) \right) dx'$$

$$w(x) - w\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + 120x^2 - 480x + \frac{1120}{3} \right) + w'(0)(x - L/3)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + 120x^2 - 480x + 640 \right) + w'(0)x$$

Pour  $\frac{2L}{3} < x < L$ :

$$w(x) - w\left(x = \frac{2L}{3}\right) = \int_{2L/3}^x w'(x') dx' = \int_{2L/3}^x \left( \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x'^2}{2} + 420x' - 1920 \right) + w'(0) \right) dx'$$

$$w(x) - w\left(x = \frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + \frac{420x^2}{2} - 1920x + \frac{14080}{3} \right) + w'(0)\left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + 210x^2 - 1920x + 6400 \right) + w'(0)x$$

En utilisant la condition que la déflexion au point B doit être zéro  $w(x = L) = 0$ , on peut trouver  $w'(x = 0)$ :

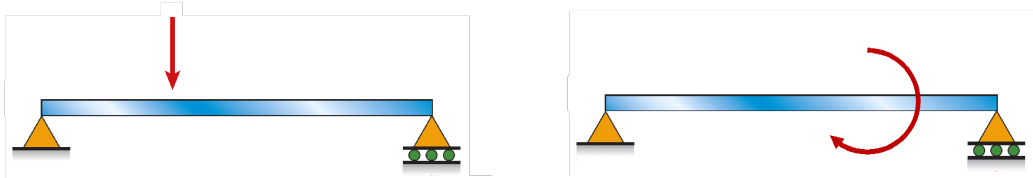
$$w(x = L) = 0 \rightarrow w'(x = 0) = -\frac{880}{3EI}$$

Ce qui nous donne l'expression finale de la déflexion:

$$\begin{aligned} w(x) &= \left\{ \frac{25x^3}{6EI} - \frac{880}{3EI}x ; x \leq \frac{L}{3} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + 120x^2 - \frac{2320}{3}x + 640 \right) ; \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{EI} \left( -\frac{35x^3}{6} + 210x^2 - \frac{6640}{3}x + 6400 \right) ; \frac{2L}{3} \leq x \leq L \right\} \end{aligned}$$

### Solution 8a.2 – Deuxième option

Une autre manière de résoudre ce problème est de diviser le système initial en deux et d'appliquer la méthode de superposition. Les deux nouveaux problèmes à résoudre sont illustrés ci-dessous.



**Figure 8a.2.2 | Les deux problèmes indépendants à résoudre pour ajouter les solutions ensuite.**

De l'énoncé ( $V(x)$  et  $M(x)$ ), on voit que  $F=60$  kN et  $M= -180$  kN.m. on donne  $L=12$  m

Si on regarde dans les formules d'aides, eg Appendix G in Geere & Goodno book, Table G2.5 qui est équivalent au problème de gauche, donnant directement la formule de la déflexion:

$$w_F(x) = \left\{ -\frac{Fx}{9EI} \left( \frac{5L^2}{9} - x^2 \right) = -\frac{20x}{3EI} (80 - x^2); x \leq \frac{L}{3} - \frac{F(L-x)}{18EI} \left( -\frac{L^2}{9} + 2xL - x^2 \right) \right. \\ \left. = -\frac{10}{3EI} (-192 + 304x - 36x^2 - x^3); \frac{L}{3} \leq x \right.$$

Pour le problème de droite, on regarde dans la même table G2.9: (attention à bien utiliser le changement de variable pour la partie non donnée dans la table :  $a \leq x \leq L$ )

$$w_M(x) = \left\{ \frac{Mx}{6LEI} \left( \frac{2L^2}{3} - x^2 \right) = \frac{5x}{2EI} (96 - x^2); x \leq \frac{2L}{3} - \frac{2L}{3} \frac{M(L-x)}{6LEI} \left( -\frac{4L^2}{3} + 2xL - x^2 \right) \right. \\ \left. = -\frac{5}{2EI} (-2304 + 480x - 36x^2 + x^3); x \geq \frac{2L}{3} \right.$$

La déflexion finale sera donc la somme de l'Eq. (0.0.24) et (0.0.25)

$$w_{total}(x) = \left\{ -\frac{Fx}{9EI} \left( \frac{5L^2}{9} - x^2 \right) + \frac{Mx}{6LEI} \left( \frac{2L^2}{3} - x^2 \right); x \right. \\ \left. \leq \frac{L}{3} - \frac{F(L-x)}{18EI} \left( -\frac{L^2}{9} + 2xL - x^2 \right) + \frac{Mx}{6LEI} \left( \frac{2L^2}{3} - x^2 \right); \frac{L}{3} \leq x \right. \\ \left. \leq \frac{2L}{3} - \frac{F(L-x)}{18EI} \left( -\frac{L^2}{9} + 2xL - x^2 \right) + \frac{M(L-x)}{6LEI} \left( -\frac{4L^2}{3} + 2xL - x^2 \right); x \geq \frac{2L}{3} \right.$$

en simplifiant:

$$w_{total}(x) = \left\{ \frac{1}{EI} \left( \frac{25}{6} x^3 - \frac{880}{3} x \right); x \leq \frac{L}{3} \frac{1}{EI} \left( 640 - \frac{2320}{3} x + 120x^2 - \frac{35}{6} x^3 \right); \frac{L}{3} \leq x \right. \\ \left. \leq \frac{2L}{3} \frac{1}{EI} \left( 6400 - \frac{6640}{3} x + 210x^2 - \frac{35}{6} x^3 \right); x \geq \frac{2L}{3} \right.$$

Ce qui nous donne exactement le même résultat que l'Eq. (0.0.23).

### - Problème 8a.3 – Extraire le diagramme des forces à partir de la flèche

- On considère une poutre de longueur  $2L = 2 \text{ m}$  avec une rigidité en flexion  $EI$  constante le long de la poutre.
- La flèche de la poutre est donnée par les 2 expressions suivantes:

$$\text{pour } 0 < x < L \quad w(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{3}{32} q_0 L x^3 - \frac{5}{96} q_0 L^2 x^2 \right] \quad (0.0.4)$$

$$\text{pour } L < x < 2L \quad w(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{3}{32} q_0 L x^3 - \frac{5}{96} q_0 L^2 x^2 + \frac{1}{24} q_0 (x-L)^4 + \frac{1}{12} q_0 L (x-L)^3 \right] \quad (0.0.5)$$

Déterminer :

- Le moment de flexion  $M_z(x)$  le long de la poutre
- La force de cisaillement  $V(x)$  le long de la poutre
- Les forces de réactions aux supports (et leur positions)
- Dessiner le diagramme des forces

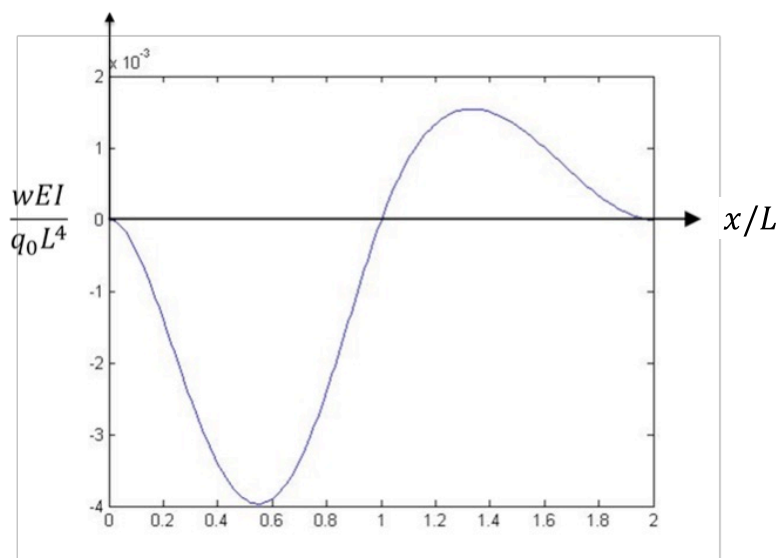


Figure 8a.3.1 | Déflexion de la poutre

**Solution**Qu'est-ce qui est donné?

Équations de déflexion de la poutre  
Longueur de la poutre  $2L = 2\text{ m}$

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Qu'est-ce qui est demandé?

- (a) Diagramme des moments en flexion
- (b) Diagramme des forces de cisaillement
- (c) Forces de réaction
- (d) Diagramme des forces

Principes et formules

- (a) Diagramme des moments en flexion

La courbure de la poutre due aux moments en flexion en tout point est donné par:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Ainsi, par dérivation de l'équation de déflexion, on obtient directement le moment en flexion:

Pour  $x < L$ :

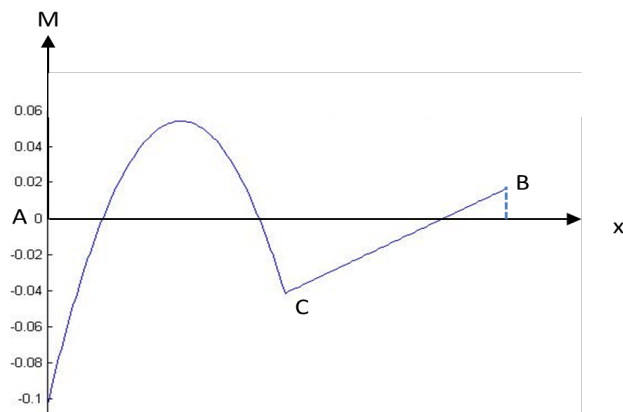
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \left( \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{3}{32} q_0 L x^3 - \frac{5}{96} q_0 L^2 x^2 \right] \right)}{dx^2} &= \frac{M(x)}{EI} \\ \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 \right] &= \frac{M(x)}{EI} \\ M(x) &= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 \end{aligned}$$

Pour  $x \geq L$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \left( \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{3}{32} q_0 L x^3 - \frac{5}{96} q_0 L^2 x^2 + \frac{1}{24} q_0 (x-L)^4 + \frac{1}{12} q_0 L (x-L)^3 \right] \right)}{dx^2} &= \frac{M(x)}{EI} \\ \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 + \frac{1}{2} q_0 (x-L)^2 + \frac{1}{2} q_0 L (x-L) \right] &= \frac{M(x)}{EI} \\ M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 + \frac{1}{2} q_0 (x-L)^2 + \frac{1}{2} q_0 L (x-L) &= \frac{1}{48} L (-5L + 3x) q_0 \end{aligned}$$

En  $x = L$ :

$$M(x = L_-) = M(x = L_+) = -\frac{q_0 L^2}{24}$$



**Figure 8a.3.2 | Diagramme des moments en flexion**

(b) Diagramme des forces de cisaillement

La force de cisaillement en tout point le long de la poutre est donné par:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

Pour  $(x < L)$ :

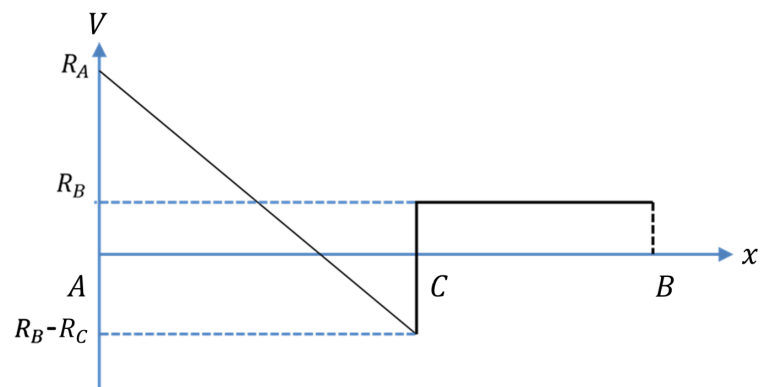
$$V(x) = \frac{d \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 \right]}{dx}$$

$$V(x) = -q_0 x + \frac{9}{16} q_0 L$$

Pour  $(x \geq L)$ :

$$V(x) = \frac{d \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{9}{16} q_0 L x - \frac{5}{48} q_0 L^2 + \frac{1}{2} q_0 (x - L)^2 + \frac{1}{2} q_0 L (x - L) \right]}{dx}$$

$$V(x) = -q_0 x + \frac{9}{16} q_0 L + q_0 (x - L) + \frac{1}{2} q_0 L = \frac{1}{16} q_0 L \text{ pour } x = L$$

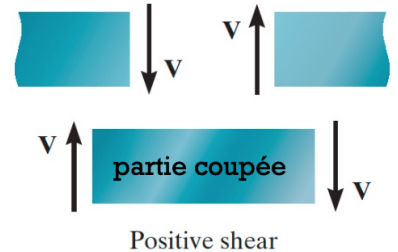


**Figure 8a.3.3 | Diagramme des forces de cisaillement**

## (c) Forces de Réaction

On remarque à partir du diagramme des forces de cisaillement de la Figure 8b.3.3 qu'une charge distribuée uniforme est appliquée entre A et C ( $V(x) \neq cste$ ), alors qu'aucune charge n'est appliquée entre C et B ( $V(x) = constante$ ).

On remarque aussi trois discontinuités dans ce diagramme, respectivement aux points A, B et C, ce qui par définition correspond à 3 charges ponctuelles appliquées. Nous les nommerons pour la suite  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$  et  $\vec{R}_C$ . On peut essayer de choisir une direction pour chacune (si on se trompe lors de cette étape, ce n'est pas grave, on trouvera simplement une force négative ensuite):



$$\vec{R}_A = R_A \cdot \hat{y}; \vec{R}_B = R_B \cdot \hat{y}; \vec{R}_C = R_C \cdot (-\hat{y})$$

On a choisi ses directions en se basant sur le diagramme: aux points A et B,  $V(x)$  est positif, tandis qu'au point C,  $V(x)$  est négatif.

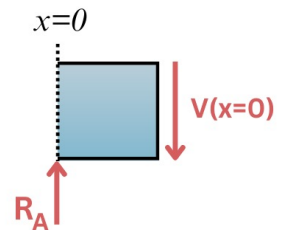
Réaction au point A:

En calculant la force de cisaillement pour  $x = 0$ , on obtient:

$$V(0) = -q_0x + \frac{9}{16}q_0L = \frac{9}{16}q_0L$$

Ainsi, en coupant très proche de l'origine  $x = 0$  et en prenant la section sur la gauche, on peut écrire l'équation d'équilibre des forces:

$$\vec{R}_A + \vec{V}(0) = R_A \cdot \hat{y} + V(x=0) \cdot (-\hat{y}) = 0 \rightarrow R_A = V(x=0) = \frac{9}{16}q_0L$$

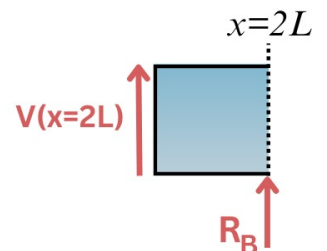
Réaction au point B:

En calculant la force de cisaillement pour  $x = 2L$ , on obtient:

$$V(x=2L) = -q_02L + \frac{9}{16}q_0L + q_0(2L-L) + \frac{1}{2}q_0L = \frac{1}{16}q_0L$$

On coupe maintenant la poutre très proche de la bordure de droite et on prend la section sur la droite. En appliquant l'équilibre des forces, on a:

$$\vec{R}_B + \vec{V}(2L) = R_B \cdot \hat{y} + V(x=2L) \cdot \hat{y} = 0 \rightarrow R_B = -\frac{1}{16}q_0L$$

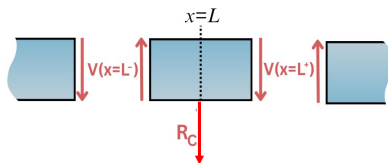
Réaction au point C:

Enfin, nous pouvons nous intéresser à ce qui se passe en  $x = L$ . On peut calculer la force de cisaillement à gauche et à droite (la force de cisaillement est en effet divisée en deux formules):

$$V(x = L^+) = \frac{1}{16} q_0 L$$

$$V(x = L^-) = -q_0 L + \frac{9}{16} q_0 L = -\frac{7}{16} q_0 L$$

Si on prend une section de la poutre juste autour du point C, on peut appliquer l'équilibre des forces en ce point:



$$\vec{V}(L^+) + \vec{V}(L^-) + \vec{R}_C = V(L^+) \cdot (-\hat{y}) + V(L^-) \hat{y} + R_C \cdot (-\hat{y}) = 0$$

$$R_C = V(L^-) - V(L^+) = -\frac{1}{2} q_0 L$$

Maintenant que nous connaissons les forces de réactions, il est possible de vérifier l'équilibre du système complet:

$$\begin{aligned} \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_C + q_0 L \cdot (-\hat{y}) &= R_A \cdot \hat{y} + R_B \cdot \hat{y} + R_C \cdot (-\hat{y}) + q_0 L \cdot (-\hat{y}) \\ &= \left( \frac{9}{16} q_0 L - \frac{1}{16} q_0 L + \frac{1}{2} q_0 L - q_0 L \right) \hat{y} = 0 \end{aligned}$$

Souvenez-vous que les signes des valeurs de l'Eq. (0.0.30) sont définies par le choix de direction des réactions de l'Eq. (0.0.16).

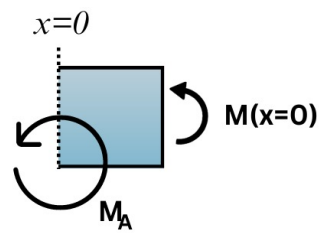
Pour l'analyse des moments en flexion, on remarque du diagramme de la Figure 8b.3.2 des discontinuités en A et B, ce qui signifie qu'un moment ponctuel est appliqué en ces points. On choisira dans les deux cas que les moments ont une direction positive selon l'axe z.

$$\vec{M}_A = M_A \cdot \hat{z}; \vec{M}_B = M_B \cdot \hat{z}$$

#### Moment au point A:

En coupant proche de la bordure gauche de la poutre et en prenant la section de gauche, on peut écrire l'équilibre des moments:

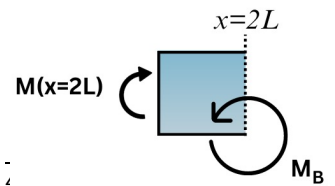
$$\vec{M}_A + \vec{M}_{int}(x = 0) = M_A \cdot \hat{z} + M_{int}(x = 0) \cdot (\hat{z}) = 0 \rightarrow M_A = -M_{int}(x = 0)$$





De manière équivalente, on coupe proche de la bordure droite de la poutre et on prend la section de droite. On peut donc écrire l'équilibre des moments:

$$\vec{M}_B + \vec{M}_{int}(x = 2L) = M_B \cdot \hat{z} + M_{int}(x = 2L) \cdot (-\hat{z}) = 0 \rightarrow M_B = M_{int}(x = 2L) =$$



Connaissant ces moments, on peut maintenant vérifier que l'équation d'équilibre des moments dans toute la poutre est satisfaite:

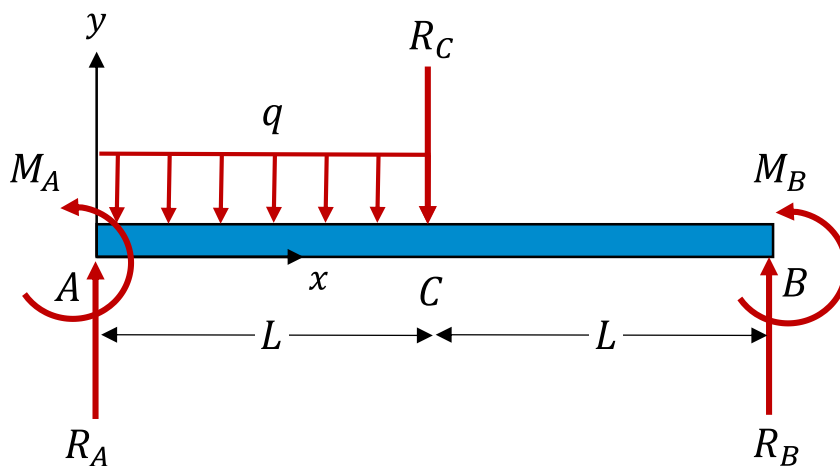
$$M_A + M_B - R_C L + R_B 2L - \frac{q_0 L^2}{2} = q_0 L^2 \left( \frac{5}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

#### (d) Diagramme des forces

Finalement, nous pouvons dessiner le diagramme des forces en donnant toutes les valeurs pour les forces et moments de réactions comme illustré sur la Figure 8b.3.4. N'oubliez pas que la direction choisie pour le dessin ne représente pas le sens physique, nous pouvons donc garder le choix de direction fait initialement.

Les réactions sont donc:

$$R_A = \frac{9}{16} q_0 L; R_B = -\frac{1}{16} q_0 L; R_C = -\frac{1}{2} q_0 L; M_A = \frac{5}{48} q_0 L^2; M_B = \frac{q_0 L^2}{48}$$



**Figure 8a.3.4** | Diagramme des forces

### Problème 8a.4 – Fléchissement avec une force axiale

Une poutre  $AB$  de longueur  $L = 4\text{ m}$  est supportée en ses extrémités. On impose une force  $F_0$  et un moment  $M_0$  au centre  $C$ .  $F_0 = 30\sqrt{2}\text{ N}$  avec un angle de  $45^\circ$ .  $M_0 = 20\text{ N} \cdot \text{m}$ .

La section de la poutre est rectangulaire, de dimensions  $b = 10\text{ cm}$  (largeur en  $z$ ),  $d = 20\text{ cm}$  (épaisseur en  $y$ ), surface  $A = 200\text{ cm}^2$ . Le module de Young du matériau est  $E = 200\text{ GPa}$ .

Déterminer:

- Les forces de réaction aux points A et B.
- La force de cisaillement  $V(x)$
- Le moment de flexion  $M(x)$
- Les contraintes maxima en compression et en traction.
- La déflexion  $w(x)$  de la poutre.

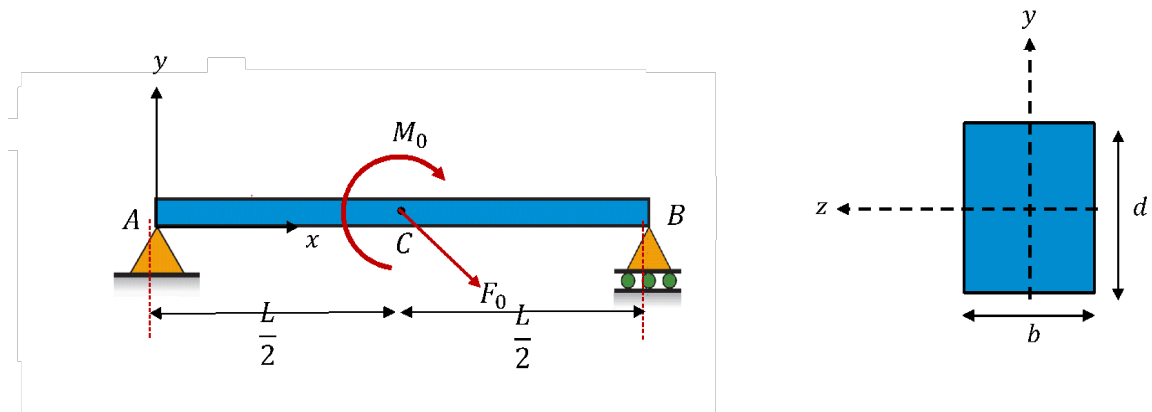


Figure 8a.4.1 | Force de cisaillement et moment en flexion relatifs à la poutre  $AB$ .

### Solution

Qu'est-ce qui est donné?

Force  $F_0 = 30\sqrt{2}\text{ N}$  at  $45^\circ$

Moment  $M_0 = 20\text{ N} \cdot \text{m}$

Longueur de la poutre  $L = 4\text{ m}$

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

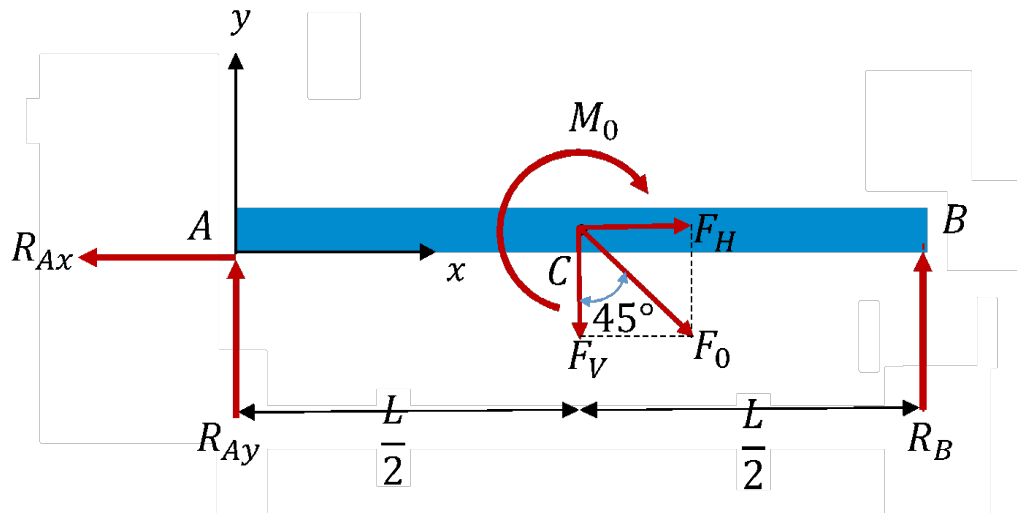
Qu'est-ce qui est demandé?

- Forces de réaction aux points A et B
- Diagramme des forces de cisaillement  $V(x)$
- Diagramme des moments en flexion  $M(x)$
- Contraintes maximales en tension et en compression
- La déflexion de la poutre  $w(x)$

Principes et formules

- Forces de réaction au points A et B

On calcule les forces de réaction à partir du diagramme des forces de la poutre entière comme illustré sur la Figure 8b.4.2.



**Figure 8a.4.2 |** Diagramme des forces de la poutre AB.

On écrit les équations d'équilibre des forces en  $x$  et  $y$ :

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -R_{Ax} + F_H = 0 \rightarrow R_{Ax} = F_H = F_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = 30 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_B - F_V = R_{Ay} + R_B - 30\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = R_{Ay} + R_B - 30 = 0$$

On remarque qu'aucun moment de réaction n'est appliqué aux points A et B. Ainsi, à partir des équations d'équilibre des moments, on obtient:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F_V \left( \frac{L}{2} \right) - M_0 + R_B(L) = 0$$

$$R_B = \frac{F_V L + 2M_0}{2L} = \frac{4 \cdot 30 + 40}{8} = 20 \text{ N}$$

Ce qui nous donne:

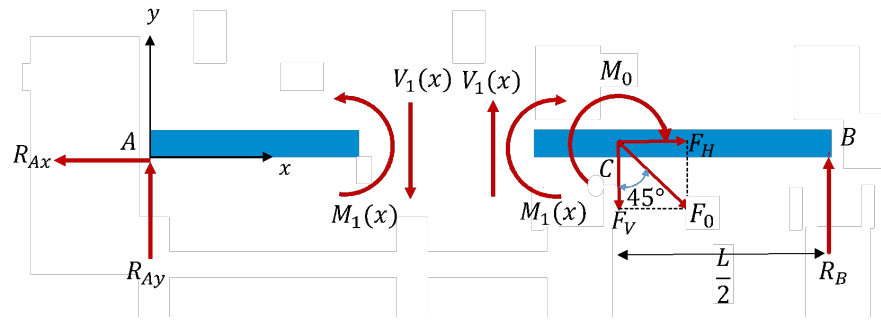
$$R_B = 20 \text{ N} \quad \& \quad R_{Ay} = 10 \text{ N}$$

(b) Diagramme des forces de cisaillement

Une fois encore, il est possible d'utiliser deux méthodes pour trouver la force de cisaillement (ainsi que le moment en flexion): i) méthode section. ii) méthode différentielle

#### Méthode des sections:

On peut couper la poutre en  $x < L/2$  et écrire les équations d'équilibre des forces pour la partie gauche de la section:

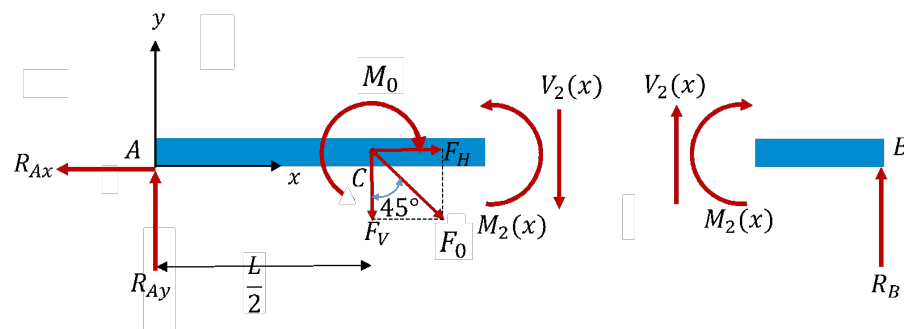


**Figure 8a.4.3** | Force de cisaillement: Diagramme des forces pour  $x < L/2$ .

$$-V_1(x) + R_{Ay} = 0$$

$$V_1(x) = R_{Ay} = 10 \text{ N}$$

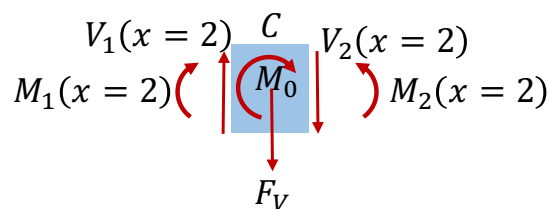
On applique le même processus pour  $L/2 < x < L$ , comme illustré par la Figure 8b.4.4, seulement cette fois nous considérerons la partie droite de la section:



**Figure 8a.4.4** | Force de cisaillement: Diagramme des forces pour  $L/2 < x < L$ .

$$V_2(x) + R_B = 0 \rightarrow V_2(x) = -20 \text{ N}$$

Pour calculer la force de cisaillement au point C on considère la Figure 8b.4.5:



**Figure 8a.4.5** | Force de cisaillement: Diagramme des forces pour élément de poutre autour de  $x = C$ .

$$\Delta V(x = C) = -F_V \rightarrow V_2(x = 2) = V_1(x = 2) - 30 = 10 - 30 = -20 \text{ N}$$

**Méthode différentielle:** Comme aucune charge distribuée n'est appliquée sur la poutre, on a  $q(x) = 0$

Pour la force de cisaillement, On peut utiliser que  $V(x) = -\int q(x)dx$

$$V_1(x) = C_1 \quad x < L/2$$

$$V_2(x) = C_2 \quad x \geq L/2$$

Avec les conditions aux bords:  $V_1(x = 0) = R_{A,y}$

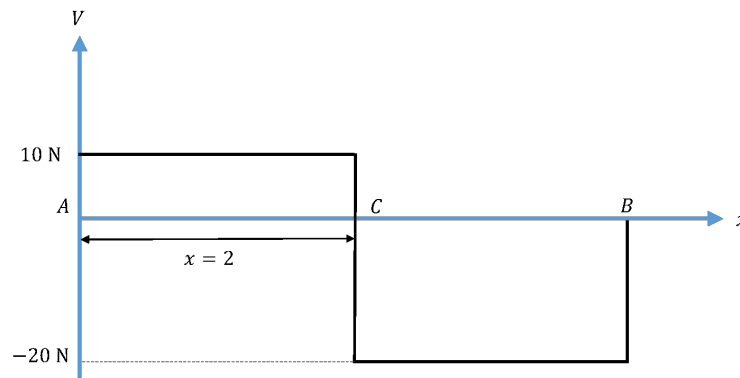
$$V_2(x = L) = -R_B$$

On obtient:

$$V_1(x) = 10 \text{ N} \quad x < L/2$$

$$V_2(x) = -20 \text{ N} \quad x \geq L/2$$

En utilisant les valeurs calculées précédemment, on peut maintenant dessiner le diagramme:



**Figure 8a.4.6 | Diagramme des forces de cisaillement**

(c) Diagramme des moments en flexion

On peut utiliser soit les coupes (sections), soit intégrer  $V(x)$  (méthode différentielle).

Méthode des sections: Considérons la Figure 8b.4.3: on écrit l'équation d'équilibre des moments de A à C, en s'intéressant à la partie gauche de la section:

$$M_1(x) = M_1(0) + \int_0^x V_1(x')dx' = 0 + \int_0^x R_{A,y}dx' = R_{A,y} \cdot x = 10x$$

De C à B, on écrit l'équation d'équilibre des moments par rapport à la partie gauche de la section illustrée dans la Figure 8b.4.4:

$$M_2(x) - M_2(x = 2) = \int_2^x V_2(x')dx' = \int_2^x (-20)dx'$$

Enfin, on utilise la Figure 8b.4.5 pour calculer que:

$$M_2(x = 2) - M_1(x = 2) = -M_0 \rightarrow M_2(x = 2) = M_1(x = 2) - M_0 = 20 + 20 = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ainsi, en combinant l'Eq. (0.0.13) et l'Eq. (0.0.12), on obtient:

$$M_2(x) = 40 - 20(x - 2) = 80 - 20x$$

Méthode différentielle: Le moment de flexion en tout point le long de la poutre, étant donné qu'aucun moment ponctuel n'est appliqué, est donné par:

$$M(x) = \int_0^x V(x')dx'$$

$$M_1(x) = 10x + C_3 \quad x < L/2$$

$$M_2(x) = -20x + C_4 \quad x \geq L/2$$

Avec les conditions aux bords:  $M_1(x=0) = 0$

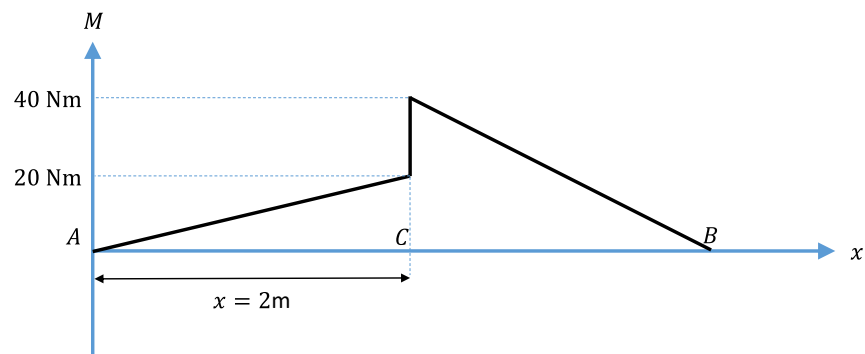
$$M_2(x=L) = 0 \Leftrightarrow -20L + C_4 = 0$$

On obtient:

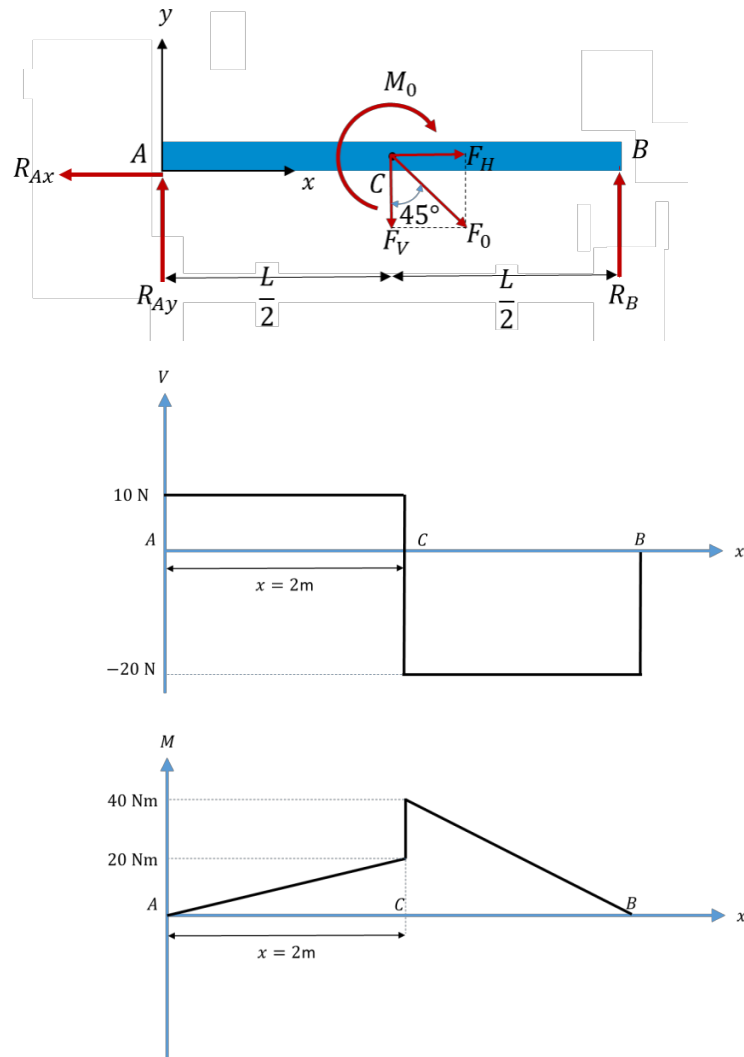
$$M_1(x) = 10x \quad x < L/2$$

$$M_2(x) = -20x + 80 \quad x \geq L/2$$

En utilisant les valeurs calculées précédemment, on peut maintenant dessiner le diagramme des moments en flexion:



**Figure 8b.4.7** | Diagramme des moments en flexion



**Figure 8a.4.8** | Diagramme résumé des forces de cisailment et moments de la poutre AB

(d) Contraintes maximales en tension et en compression

Sur la partie gauche de la poutre ( $x < L/2$ ), on retrouve deux contributions à la contrainte, a) la partie due à la flexion et b) la partie due à l'élongation générée par la force axiale.

Sur la partie de droite ( $x > L/2$ ) de la poutre cependant, on retrouve seulement la partie due à la flexion de la poutre. Pour cette partie, étant donné que la section transversale est symétrique, on peut écrire:

$$\sigma_{max,t,bending} = \sigma_{max,c,bending} = \frac{M_{max}}{I_{z,y_0}} \frac{d}{2}$$

On commence par calculer le second moment d'inertie  $I_{z,y_0}$  autour de l'axe Z dans le plan yz, en utilisant la formule suivante:

$$I_{z,y_0} = \iint_A y^2 dA = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{z,y_0} = \frac{(10)(20^3)}{12} 10^{-8} = 6.7 \cdot 10^{-5} m^4$$

La contribution de la flexion sera maximum proche du centre de la poutre (à  $L/2$ ) pour chacune des deux moitiés.

En plus de la contribution de la flexion, pour la moitié de gauche, on a aussi une charge axiale à considérer. Cette charge axiale allonge la poutre, et génère une contrainte normale en tension. Cette contrainte vaut:

$$\sigma_{elong} = \frac{F_H}{A} = \frac{30}{0.02} Pa = 1.5 kPa$$

On peut maintenant calculer les quatre différentes options où la contrainte maximale pourrait se situer: à  $x = L/2$  mais dans la partie de droite ou de gauche, et en haut ou en bas de la poutre ?

$$|\sigma|_{bottom, left} = \frac{F_H}{A} - \frac{M\left(x = \frac{L^-}{2}\right)}{I_{z, y_0}} \frac{d}{2} = \frac{30}{0.02} + \frac{20 \cdot 0.1}{6.7 \cdot 10^{-5}} = 28500 Pa$$

$$|\sigma|_{top, left} = \frac{F_H}{A} + \frac{M\left(x = \frac{L^-}{2}\right)}{I_{z, y_0}} \frac{d}{2} = \left| \frac{30}{0.02} - \frac{20 \cdot 0.1}{6.7 \cdot 10^{-5}} \right| = 31500 Pa$$

$$|\sigma|_{top, right} = \frac{M\left(x = \frac{L^+}{2}\right)}{I_{z, y_0}} \frac{d}{2} = \frac{40 \cdot 0.1}{6.7 \cdot 10^{-5}} = 60000 Pa$$

$$|\sigma|_{bottom, right} = \frac{M\left(x = \frac{L^+}{2}\right)}{I_{z, y_0}} \frac{d}{2} = \frac{40 \cdot 0.1}{6.7 \cdot 10^{-5}} = 60000 Pa$$

**La contrainte maximale est donc située en haut et en bas de la poutre, juste à droite du point central.**

(e) Équation de la déflexion de la poutre

Ici, deux méthodes peuvent être utilisées pour trouver la déflexion: i) par intégration ou ii) par superposition.

Intégration:

La courbure de la poutre due aux moments de flexion en tout point est donné par:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Ainsi, on peut calculer la déflexion de la poutre par double intégration de l'Eq. (0.0.23):

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \int_0^{x'} M(x'') dx'' \right) dx'$$

En faisant cette double intégration, il faut faire attention au fait que la première intégrale va générer des constantes qu'il faudra par la suite éliminer. Il est donc préférable de procéder par étapes : de commencer par calculer  $w'(x)$ , puis la déflexion  $w(x)$ .

Comme on peut le voir sur la Figure 8b.4.7 le moment est défini en deux parties.

Pour  $0 \leq x \leq 2$ :

$$w'_1(x) - w'_1(0) = \frac{1}{EI} \int_0^x M_1(x') dx' = \frac{1}{EI} \int_0^x 10x' dx'$$



$$w_1'(x) = \frac{1}{EI} \frac{10x^2}{2} + w_1'(0) = \frac{5}{EI} x^2 + w_1'(0)$$

Pour  $2 \leq x \leq 4$ :

$$w_2'(x) - w_2'(x=2) = \frac{1}{EI} \int_2^x M_2(x') dx' = \frac{1}{EI} \int_2^x (80 - 20x') dx'$$

$$w_2'(x) = \frac{1}{EI} [80(x-2) - 10(x^2-4)] + \left( \frac{20}{EI} + w_1'(0) \right) = w_1'(0) - \frac{10}{EI} (10 - 8x + x^2)$$

Nous pouvons maintenant calculer  $w(x)$  à partir de  $w'(x)$  :

Pour  $0 \leq x \leq 2$ :

$$w_1(x) - w_1(x=0) = \int_0^x w_1'(x') dx'$$

$$w_1(x=0) = 0 \text{ et } w_1(x) = \frac{5x^3}{3EI} + w_1'(0)x$$

Pour  $2 \leq x \leq 4$ :

$$w_2(x) - w_2(x=2) = \int_2^x w_2'(x') dx'$$

$$w_2(x) = \frac{40}{3EI} + w_1'(0) \cdot 2 + w_1'(0)(x-2) - \frac{10}{EI} \left( 10(x-2) - 4(x^2-4) + \frac{x^3-8}{3} \right)$$

$$w_2(x) = \frac{-10(-24 + 30x - 12x^2 + x^3)}{3EI} + w_1'(0)x$$

En utilisant la condition que la déflexion au point B vaut zéro, on peut trouver  $w_1'(x=0)$

$$w_2(x=4) = 0 \rightarrow w_1'(x=0) = -\frac{80}{3EI}$$

Ce qui donne une expression finale pour la déflexion :

Pour  $0 \leq x \leq 2$ :

$$w_1(x) = \frac{5x^3 - 80x}{3EI}$$

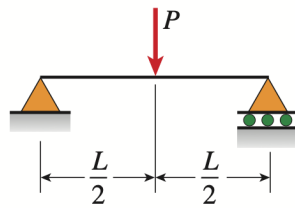
Pour  $2 \leq x \leq 4$ :

$$w_2(x) = -\frac{10}{3EI} (x^3 - 12x^2 + 38x - 24)$$

Superposition:

En utilisant la Table G Gere&Goodno- *beam deflection* montrée en Figure 8a.4.9:

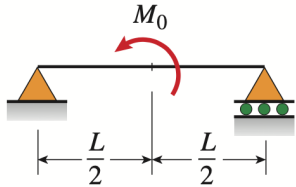
4



$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \quad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

8



$$v = -\frac{M_0 x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \quad v' = -\frac{M_0}{24LEI}(L^2 - 12x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = 0 \quad \theta_A = \frac{M_0 L}{24EI} \quad \theta_B = -\frac{M_0 L}{24EI}$$

**Figure 8a.4.9** | Poutres et formules extraites de la table G Gere & Goodno

On voit ici que pour la deuxième poutre, le moment est opposé à ce qu'on trouve dans le tableau. Pour pouvoir utiliser cette formule, il faut un changement de variable. Il faut donc tout d'abord remplacer  $M_0$  par  $-M_0$ , puis remplacer  $x$  par  $(L - x)$ . Cette équation sera ainsi disponible pour  $0 \leq (L - x) \leq L/2 \Leftrightarrow L/2 \leq x \leq L$

On trouve directement:

$$\begin{aligned} & x < L/2 \\ w_1(x) &= \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) - \frac{-M_0 x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \\ & x \geq L/2 \\ w_2(x) &= \frac{-M_0 (L-x)}{24LEI}(L^2 - 4(L-x)^2) + \frac{-P(L-x)}{48EI}(3L^2 - 4(L-x)^2) \end{aligned}$$

*Si on fait attention aux changements de variables, c'est quand même beaucoup plus rapide...*

*La force horizontale change les contraintes dans la poutre, mais pas, avec nos simplifications, la flèche de la poutre*

### Problème 8a.5 - Calcul de la déflexion à partir des moments (2)

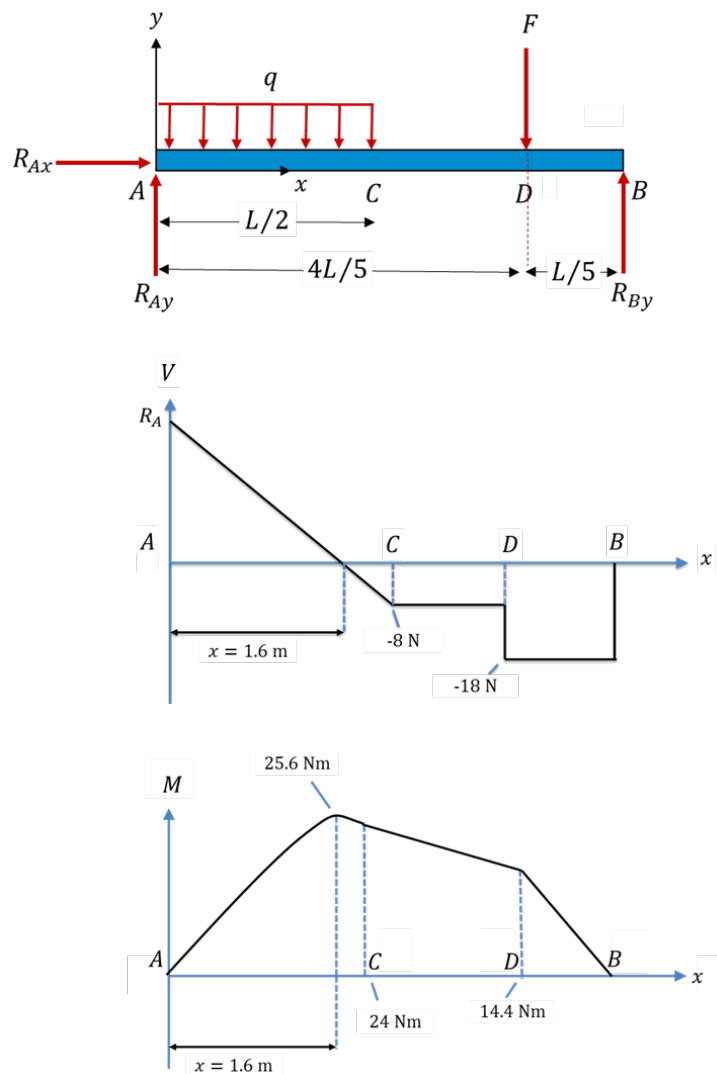
On considère une poutre  $AB$  de longueur  $L=4$  m. Les diagrammes de force de cisaillement relative et de moment en flexion sont données sur la figure 8b.5.1.

Les moments en flexion sont :

$$M_1(x) = 32x - 10x^2 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$M_2(x) = 24 - 8(x - 2) \text{ N} \cdot \text{m} \quad \frac{L}{2} < x < \frac{4L}{5}$$

$$M_3(x) = 14.4 - 18(x - 3.2) \text{ N} \cdot \text{m} \quad \frac{4L}{5} < x < L$$



**Figure 8a.5.1** Diagrammes de force de cisaillement et de moment en flexion relatifs à la poutre  $AB$ .

**Solution 8a.5**

I Conditions au bord, interprétés des  $V(x)$  et  $M(x)$  aux extrémités.  $M(x) = 0$  de chaque côté, et  $V(x)$  est discontinue, comme pour un pivot. On va donc dire

- a.  $w_1(x=0) = 0$
- b.  $w_3(x=L)=0$

II continuité:

- c.  $w_1(x=L/2) = w_2(x=L/2)$
- d.  $w_2(x=4L/5) = w_3(x=4L/5)$
- e.  $w'_1(x=L/2) = w'_2(x=L/2)$
- f.  $w'_2(x=4L/5) = w'_3(x=4L/5)$

Comme pour les exercices précédent, on calcule la déflexion pour chaque portion de la poutre:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

On calcule d'abord la première dérivée de la déflexion, parce que nous avons besoin d'imposer la continuité aux points  $C$  et  $D$  ( $x = \frac{L}{2}$  et  $x = \frac{4L}{5}$  respectivement). Rappelez vous que nous ne connaissons pas les valeurs de la dérivée de la déflexion aux extrémités de la poutre, seulement à l'encastrement en  $x = 0$ .

Pour  $w'(x)$

Pour  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ :

$$w'_1(x) - w'_1(0) = \frac{1}{EI} \int_0^x (32x' - 10x'^2) dx' = \frac{1}{EI} \left( 16x^2 - \frac{10x^3}{3} \right)$$

Pour  $\frac{L}{2} < x < \frac{4L}{5}$ :

$$w'_2(x) - w'_2(x=2) = \frac{1}{EI} \int_2^x (24 - 8(x' - 2)) dx'$$

$$w'_2(x) = w'_2(x=2) + \frac{1}{EI} (40x - 4x^2 - 64)$$

$$w'_2(x) = \frac{1}{EI} \left( 40x - 4x^2 - \frac{80}{3} \right) + w'_2(0)$$

Pour  $\frac{4L}{5} < x < L$ :

$$w'_3(x) - w'_3(x=3.2) = \frac{1}{EI} \int_{3.2}^x (14.4 - 18(x' - 3.2)) dx'$$

$$w'_3(x) = w'_3(x=3.2) + \frac{1}{EI} (72x - 9x^2 - 138.24)$$

$$w_3'(x) = \frac{1}{EI} \left( 72x - 9x^2 - \frac{233.6}{3} \right) + w'(0)$$

On peut maintenant intégrer une deuxième fois pour calculer la déflexion:

Pour  $x \leq \frac{L}{2}$ :

$$w_1(x) - w_1(x=0) = \int_0^x w_1'(x') dx' = \int_0^x \left( \frac{1}{EI} \left( 16x'^2 - \frac{10x'^3}{3} \right) + w'(0) \right) dx'$$

$$w_+(x=0) = 0 \text{ et } w_+(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{16}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 \right) + w'(0)x$$

Pour  $\frac{L}{2} < x < \frac{4L}{5}$ :

$$w_2(x) - w_2(x=2) = \int_2^x w'(x') dx' = \int_2^x \left( \frac{1}{EI} (40x' - 4x'^2 - 26.6) + w'(0) \right) dx'$$

$$w_2(x) - w_2(x=2) = \frac{1}{EI} \left( 20x^2 - \frac{4x^3}{3} - 26.6x - 16.14 \right) + w'(0)(x-2)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{EI} \left( 20x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{80}{3}x + \frac{40}{3} \right) + w'(0)x$$

Pour  $\frac{4L}{5} < x < L$ :

$$w_3(x) - w_3(x=3.2) = \int_{3.2}^x w'(x') dx' = \int_{3.2}^x \left( \frac{1}{EI} (72x' - 9x'^2 - 77.8) + w'(0) \right) dx'$$

$$w_3(x) - w_3(x=3.2) = \frac{1}{EI} (36x^2 - 3x^3 - 77.8x - 21.38) + w'(0)(x-3.2)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{EI} (36x^2 - 3x^3 - 77.8667x + 67.9467) + w'(0)x$$

En appliquant la condition que la déflexion au point B doit valoir zéro, on peut obtenir la valeur de la déflexion en  $x=0$ :

$$w_3(x=4) = 0 \rightarrow w'(x=0) = -\frac{35.12}{EI}$$

Ce qui nous donne l'expression complète de la déflexion :

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{EI} \left( \frac{16}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 \right) - \frac{35.12}{EI} x; & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ w_2(x) &= -\frac{4}{3EI} (-10. + 46.34x - 15.x^2 + x^3) & \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{4L}{5} \\ w_3(x) &= \frac{1}{EI} (67.9467 - 112.987x + 36.x^2 - 3.x^3); & \frac{4L}{5} \leq x \leq L \end{aligned}$$